СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ В ЭКОНОМИКЕ

На интуитивном уровне вероятность события можно определить как меру уверенности, что данное событие произойдет. Она принимает значения на интервале от 0 до 1, причем 0 соответствует невозможному событию, а 1 означает, что это событие достоверное. С понятием вероятности события студенты экономических специальностей знакомятся в курсе математики.

2.1. Случайная величина

Случайной величиной называется переменная, которая с определенной вероятностью может принимать какое-либо значение, заранее не известное, из каждого заданного множества. Ее значение не может быть точно предсказано.

Примерами случайной величины являются число посетителей ресторана, количество проданных за день телевизоров в магазине, средний темп инфляции за последний месяц, обменный курс национальной валюты, цена акции на бирже на момент за-крытия, прибыль предприятия. Различают дискретные и непрерывные случайные величины.

2.1.1. Дискретная случайная величина. Если всевозможные значения случайной величины можно перечислить, то это *дискретная* случайная величина. Из приведенных выше примеров первые два – это дискретные случайные величины, а остальные – непрерывные случайные величины. Например, число телевизоров, проданных в магазине за один день. Дискретную случайную величину можно задать в виде таблицы:

x	x_1	x_2	...	x_m
p	p_1	p_2	...	P_m

Здесь $x_1, x_2, ..., x_m$ – все значения, которые может принимать случайная величина x с вероятностями $p_1, p_2, ..., p_m$ соответственно. При этом вероятности – неотрицательные числа в сумме равные 1, так как случайная величина x обязательно примет одно из значений $x_1, x_2, ..., x_m$:

$$x_1, x_2, ..., x_m \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

П р и м е р 2.1. При бросании игрального кубика все шесть исходов равновозможные. Следовательно, случайная величина, равная числу, которое выпадет при бросании кубика, имеет распределение, задаваемое следующей таблицей:

x	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

П р и м е р 2.2. Более сложная ситуация возникает, если бросаются одновременно два игральных кубика. Исходом здесь является сумма чисел, выпавших на обоих кубиках.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	6/36	2/36	1/36

П р и м е р 2.3. В автомобильном салоне за день покупаются не более 5 машин. За длительный период наблюдений установлено, что число проданных за один рабочий день автомобилей имеет следующее распределение вероятностей:

x	0	1	2	3	4	5
p	0,05	0,12	0,33	0,35	0,13	0,02

В отличие от предыдущего примера распределение вероятностей здесь не равномерное. В 68% случаев за день продаются 2 или 3 автомобиля.

2.1.2. Непрерывная случайная величина. Случайная величина, которая может принимать любые значения из некоторого интервала, является *непрерывной* случайной величиной. Например, максимальный биржевой курс доллара на торгах в течение дня, температура воздуха в полдень.

Непрерывную случайную величину задают функцией плотности вероятности *p(x)*, принимающей неотрицательные значения. Типичный вид графика плотности вероятности показан на рис.2.1.

Плотность вероятности $p(x)$ равна вероятности попадания случайной величины в окрестность точки x в расчете на единицу его длины. Значит, вероятность попадания случайной величины в интервал от x до $x+\Delta x$ приблизительно равна $p(x)\Delta x$.

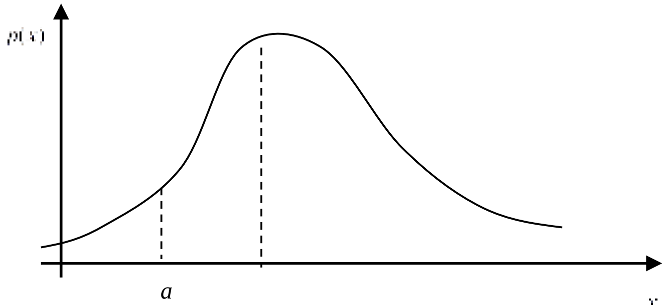

Рис. 2.1. График плотности вероятности

Вероятность того, что случайная величина *x* окажется в интервале $[a, b)$, равна

$$\Pr ob\{a \le x < b\} = \int_a^b p(x)dx$$

Это площадь под кривой плотности вероятности *p(x)* над отрезком от *a* до b (рис. 2.1). Случайная величина будет чаще попадать под «горбом». Поскольку какое-либо значение *x* реализуется, то $\Pr ob\{-\infty < x < \infty\} = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$

Примером непрерывной случайной величины служит так называемое *нормальное* распределение, для которой плотность вероятности

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

где μ и σ – параметры, число π = 3.14... График этой функции симметричен относительно вертикальной прямой $x = \mu$, а параметр σ определяет «пологость» графика. Заметим, график функции плотности вероятности симметричен относительно прямой $x = \mu$.

Центральная предельная теорема- если случайную величину можно представить как сумму большого числа не зависящих друг от друга слагаемых, каждое из которых вносит в сумму незначительный вклад, то эта сумма распределена приблизительно по нормальному закону. Например, высота деревьев одной породы зависит от количества получаемых ими ежедневно влаги, тепла, света и распределена примерно по нормальному закону.

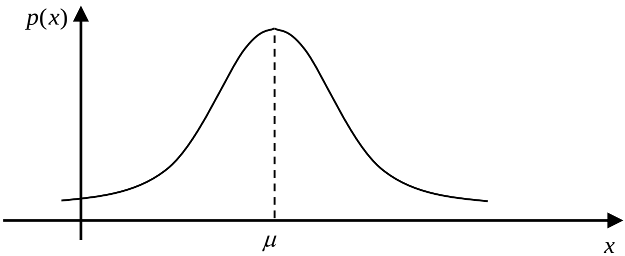

Рис. 2.2. График плотности вероятности нормального распределения

Для задания случайной величины также используется функция распределения вероятности:

$$F(x) = \mathrm{Pr}ob\{\xi < x\},$$

где x – любое фиксированное значение случайной величины ξ. Значение $F(x)$ равно вероятности того, что данная случайная величина ξ примет какое-либо значение в интервале от $-\infty$ до x. Из определения ясно, что функция распределения вероятности – неубывающая и что она принимает значения в интервале от 0 до 1.

Так как *F(x)* есть площадь под графиком плотности вероятности на интервале от – ∞ до *x*, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(\xi)d\xi \, .$$

Продифференцировав это равенство по *x*, получим, что плотность вероятности есть производная функции распределения: $p(x) = F'(x)$.

Вероятность попадания случайной величины в интервал от *a* до *b* можно представить как разность площадей $F(b)$ и $F(a)$, т.е. $\Pr ob\{a \le x < b\} = F(b) - F(a)$.

2.2. Характеристики случайной величины

2.2.1. Среднее случайной величины. Для дискретной случайной величины *x средним,* или *математическим, ожиданием* называется средневзвешенное значение ее возможных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с весовыми коэффициентами – соответствующими вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$ их реализации:

$$E(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_m p_m = \sum_{i=1}^{m} x_i p_i \, .$$

Оно определяет среднее ожидаемое значение случайной величины. Математическое ожидание случайной величины называют также *средним по генеральной совокупности*.

П р и м е р 2.4. Для распределения дискретной случайной величины

x	*12*	*20*	*30*
p	*0.3*	*0.5*	*0.2*

математическое ожидание

$$E(x) = 12 \cdot 0.3 + 20 \cdot 0.5 + 30 \cdot 0.2 = 19.6.$$

В случае непрерывной случайной величины суммирование заменяется на интегрирование:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)\, dx.$$

Для нормального распределения вероятностей, оказывается, параметр μ равен математическому ожиданию случайной величины x, т.е. $E(x) = \mu.$

Свойства математического ожидания выводятся из свойств суммирования или интегрирования.

- Математическое ожидание суммы нескольких случайных величин равно сумме их математических ожиданий, т.е. $E(x+y) = E(x) + E(y).$
- При умножении случайной величины на константу ее математическое ожидание умножается на эту же константу, т.е. $E(\lambda x) = \lambda E(x).$
- Математическое ожидание постоянной величины равно самой этой величине, т.е. $E(c) = c.$

2.2.2. Дисперсия случайной величины. *Дисперсией* случайной величины называется математическое ожидание квадрата разности между этой величиной x и ее математическим ожиданием $\mu_x = E(x),$ т.е.

$$\operatorname{var}(x) = E\left\{\left[x - E(x)\right]^2\right\}.$$

В частности, для дискретной случайной величины

$$\operatorname{var}(x) = \sum_{i=1}^{m} (x_i - \mu_x)^2\, p_i,$$

а для непрерывной случайной величины

$$\mathrm{var}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)^2\, p(x)\, dx.$$

Величина $\sigma_x = \sqrt{\mathrm{var}(x)}$ называется *среднеквадратическим отклонением.* Она так же, как и дисперсия, определяет меру «разброса» случайной величины относительно математического ожидания μ_x. Не следует ошибочно полагать, что разброс случайной величины x относительно μ_x не превышает σ_x. Величина σ_x характеризует средний разброс x в определенном выше смысле.

Для примера 2.4 дискретной случайной величины дисперсия

$$\mathrm{var}(x) = (12-19.6)^2\cdot 0.3 + (20-19.6)^2\cdot 0.5 + (30-19.6)^2\cdot 0.2 = \\ = 79.472,$$

а среднеквадратическое отклонение $\sigma_x = 8.915$.

В случае нормального распределения можно вычислить, что дисперсия $\mathrm{var}(x) = \sigma^2$.

В дальнейшем то, что случайная величина имеет распределение с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2**,** будем записывать следующим образом*: x ~* (μ, σ^2). Для нормального распределения записывается *x ~ N*(μ, σ^2).

Отметим следующие свойства дисперсии:

- при умножении случайной величины на константу дис-персия умножается на квадрат этой константы, т.е. $\mathrm{var}(\lambda x) = \lambda^2\,\mathrm{var}\,(x)$.
- Постоянное слагаемое можно опустить, т.е. $\mathrm{var}(x+c) = \mathrm{var}(x)$, где *c* – константа.
- Дисперсия константы равна нулю, т.е. $\mathrm{var}(c) = 0$.
- Справедлива формула $\mathrm{var}(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$.

2.2.3. Стандартное нормальное распределение. Нормальное распределение вероятностей, для которого *E(x) = 0,* var(x) = 1, называется *стандартным нормальным распределением вероятностей*, т.е. для него $x \sim N(0,1)$.

2.3.2. Ковариация и коэффициент корреляции. Мерой взаимосвязи двух случайных величин служит их *ковариация*:

$$\sigma_{xy} = \mathrm{cov}(x, y) = E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)].$$

Она обладает следующими свойствами, которые следуют из свойств математического ожидания и определения ковариации.

- Ковариация переменной с самой собой равна вариации этой переменной: $\mathrm{cov}(x, x) = \mathrm{var}(x)$.
- Величина ковариации не изменится, если переменные поменять местами, т.е. $\mathrm{cov}(x, y) = \mathrm{cov}(y, x)$.
- Скалярный множитель при переменной можно вынести из под ковариации: $\mathrm{cov}(\lambda x, y) = \lambda \,\mathrm{cov}(x, y)$.
- Постоянное слагаемое можно опустить, т.е. $\mathrm{cov}(x + c, y) =$ $= \mathrm{cov}(x, y)$, где c – константа.
- Справедлива формула: $\mathrm{cov}(x, y) = E(xy) - E(x)E(y)$.

Для дискретных случайных величин она равна:

$$\mathrm{cov}(x, y) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} (x_i - \mu_x)(y_j - \mu_j).$$

Если два признака отклоняются от своих математических ожиданий, как правило, в совпадающих направлениях, например, рост и вес человека, то их ковариация положительна, а если, как правило, меняются в противоположных направлениях, то она отрицательна.

Ковариация зависит от размерностей случайных величин x и y. Поэтому часто используют для характеристики их взаимосвязи коэффициент корреляции:

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{\text{var}(x)\,\text{var}(y)}}.$$

Он меняется в пределах от –1 до 1. Случай $\rho_{xy} = 1$ соответствует наличию положительной линейной связи, а случай $\rho_{xy} = -1$ соответствует наличию отрицательной линейной связи между переменными x и y. При $\rho_{xy} = 0$ говорят, что переменные x и y некорреливанные.

При вычислении математических ожиданий μ_x, μ_y и дисперсий σ_x^2, σ_y^2 суммы соответственно заменяются интегралами:

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x p_x(x) dx\ ,\ \ \mu_y = \int_{-\infty}^{\infty} y p_y(y) dy\,,$$

$$\sigma_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 p_x(x) dx\ ,\ \ \sigma_y = \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mu_y)^2 p_y(y) dy\,.$$

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

2.3.3. Независимые случайные величины. Если функция совместного распределения случайных величин представима в виде произведения функций распределения этих случайных величин, т.е.

$$F(x, y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y),$$

то переменные ξ, η называются *независимыми* случайными величинами.

Вообще говоря, имеет место равенство:

$$\mathrm{var}(x+y)=\mathrm{var}(x)+\mathrm{var}(y)+2\mathrm{cov}(x,y).$$

Оно следует из определения вариации и свойств ковариации. Если случайные величины x и y некоррелированные, в частности, независимые, то справедливо следующее важное свойство дисперсии:

$$\mathrm{var}(x+y)=\mathrm{var}(x)+\mathrm{var}(y).$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найдите вероятность того, что выпадет число, не превосходящее 3 при бросании: а) одного игрального кубика, б) двух игральных кубиков в сумме.

5. Магазин электробытовых товаров имеет следующее распределение годовой прибыли:

x	-10	-5	0	5	10	15	20	25
p	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.15	0.07	0.03

Вычислите математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение прибыли магазина.

11. Случайная величина x имеет следующее распределение вероятности:

x	3	6	9	12	15
p	0.1	0.3	0.4	0.1	0.1

Найдите математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение этой случайной величины.

13. Допустим, что величина налога, уплачиваемого фирмой, равна:

$$X = 0.1Q - 0.08I - 10,$$

где Q – прибыль фирмы, I – объем инвестиций. Знак «минус» отражает то, что государство поощряет инвестиционную деятельность фирм. Используя свойства, вычислите дисперсию $var(X)$ и ковариацию $\text{cov}(X, Q)$, если $var(Q) = 3,\ var(I) = 10,\ cov(Q, I) = 2$.